Passeideboa !

AULAS, CURSOS E MENTORIAS

WWW.PASSEIDEBOA.COM.BR

CURSO PREPARATÓRIO PARA O EXAME DE ADMISSÃO AO MESTRADO - POLI/USP (PPGEM/USP)

Matéria: MECÂNICA GERAL

Prof . M.Sc Victor T.Tayra

*

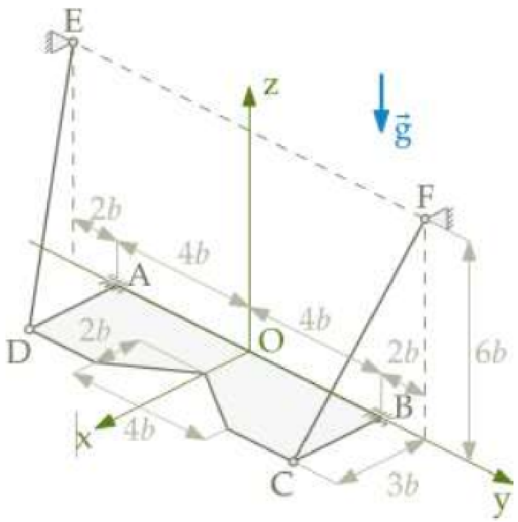
Questão 1

7) Considere o modelo ilustrado na figura em que a placa homogênea ABCD de peso $-P\vec{k}$ e geometria indicada encontra-se em equilíbrio sobre o plano horizontal xy vinculada por meio de aneis ideiais posicionados nas extremidades A e B e por cabos ideais presos nos pontos D e C. Tais cabos estão ancorados nos pontos E e F, contidos no plano vertical yz. Pede-se:

(a) As coordenadas do centro de massa G da placa.

(b) O diagrama de corpo livre da placa.

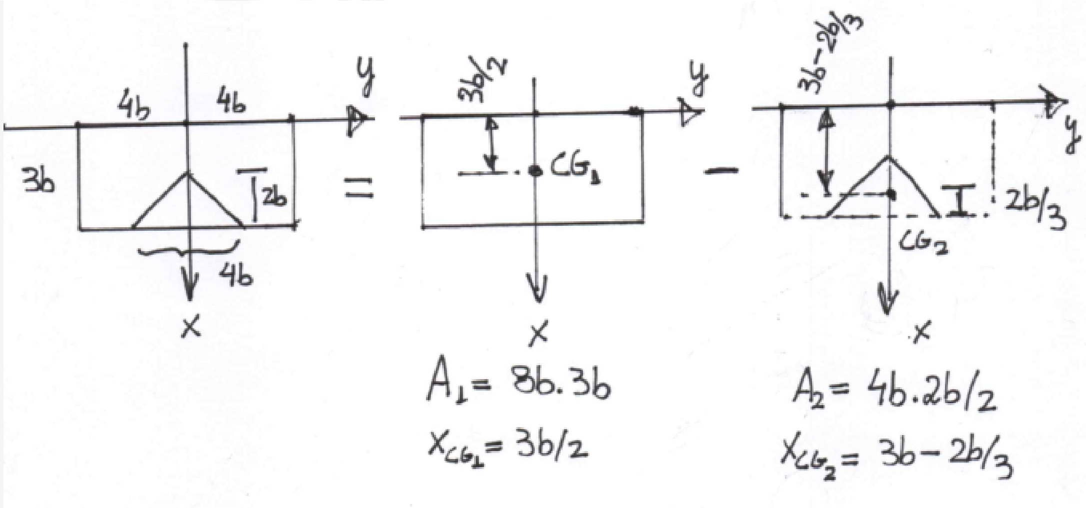
(c) As forças de tração nos cabos e as componentes de reação nos anéis.



Resolução 1

A -)

Observe que a placa apresenta massa distribuída ao longa dos eixos x e y. Assim ao analisarmos a disposição da placa no eixo x-y conforme figura abaixo, observamos que a placa é simetrica na coordenada y, sendo que no eixo x não há simetria e é justamente esta coordenada a ser encontrada.



Observe que a figura da placa nada mais é do que um retângulo, subtraído de um triângulo. Sendo assim, no retângulo calcularemos sua área A1 e a distância do seu centro em relação a origem e em seguida a área A2 do triângulo, e a distância xcg2 de seu baricentro em relação a origem. Lembrando que para um triângulo, o seu bericentro encontra-se a 1/3 da haltura do triângulo em relação a base.

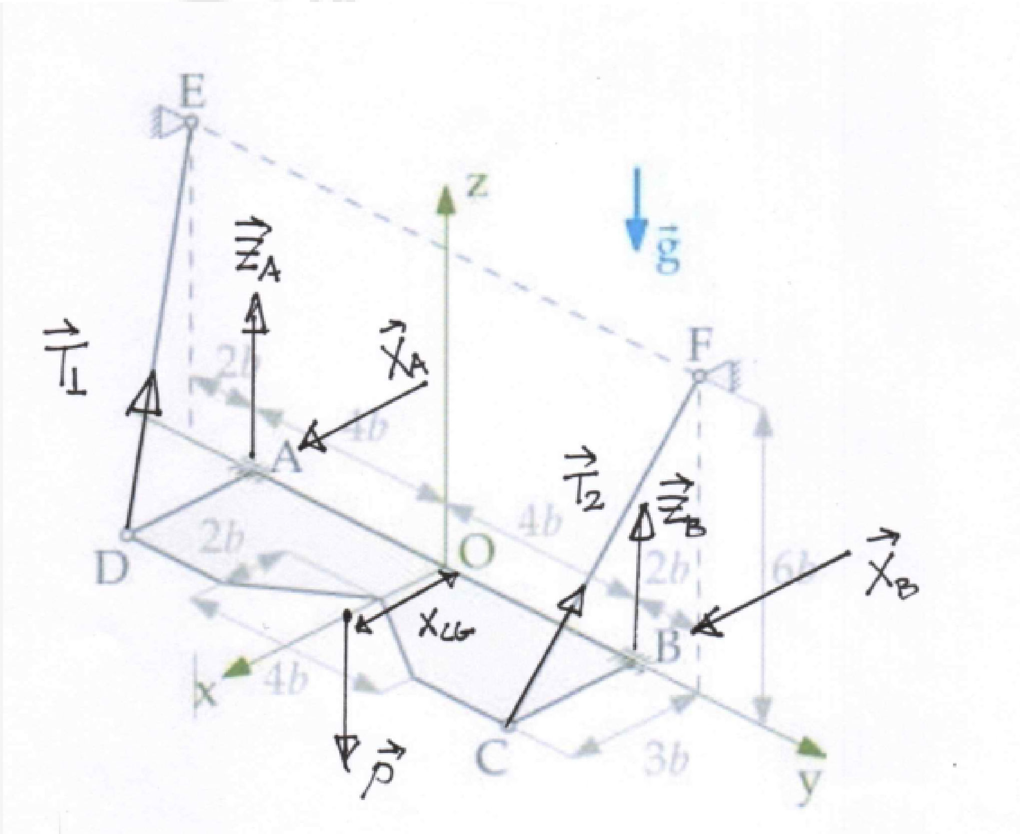
Geometricamente falando a posição do centro de massa, nada mais é que uma média ponderada dos centros de massa de cada constituinte pelas suas respectivas áreas. Sendo assim temos:

$$X_{CG} = \frac{A_1 \cdot X_{CG1} - A_2 \cdot X_{CG2}}{A_1 - A_2}$$

$$X_{CG} = \frac{\left(24\,b^2\right)\left(\frac{3b}{2}\right) - \left(4b^2\right)\left(3b - \frac{2b}{3}\right)}{20\,b^2} \quad \Rightarrow X_{CG} = \frac{4b}{3}$$

B -)

Na figura abaixo representamos o diagrama do corpo livre com todas as forças e reaçãoes presentes na placa:



Onde:

- $\vec{P}$ é a força peso, e atua no centro gravitacional (X_{CG}) da placa.
- $\vec{Z}_A$ é a força de reação vertical (eixo z) do anel A.
- $\vec{X}_A$ é a força de reação horizontal (eixo x) do anel A.
- $\vec{Z}_B$ é a força de reação vertical (eixo z) do anel B.
- $\vec{X}_B$ é a força de reação horizontal (eixo x) do anel B.
- $\vec{T}_1$ é a força de tração no fio preso ao segmento DE.
- $\vec{T}_2$ é a força de tração no fio preso ao segmento CF.

C -)

Para o cálculo das trações teremos $\vec{T_1} = T_1 \cdot \vec{\lambda_{DE}}$ e $\vec{T_2} = T_2 \cdot \vec{\lambda_{CF}}$ Sendo $\vec{\lambda_{DE}}$ o vetor unitário ao longo do segmento DE e $\vec{\lambda_{CF}}$ o vetor unitário ao longo do segmento CF.

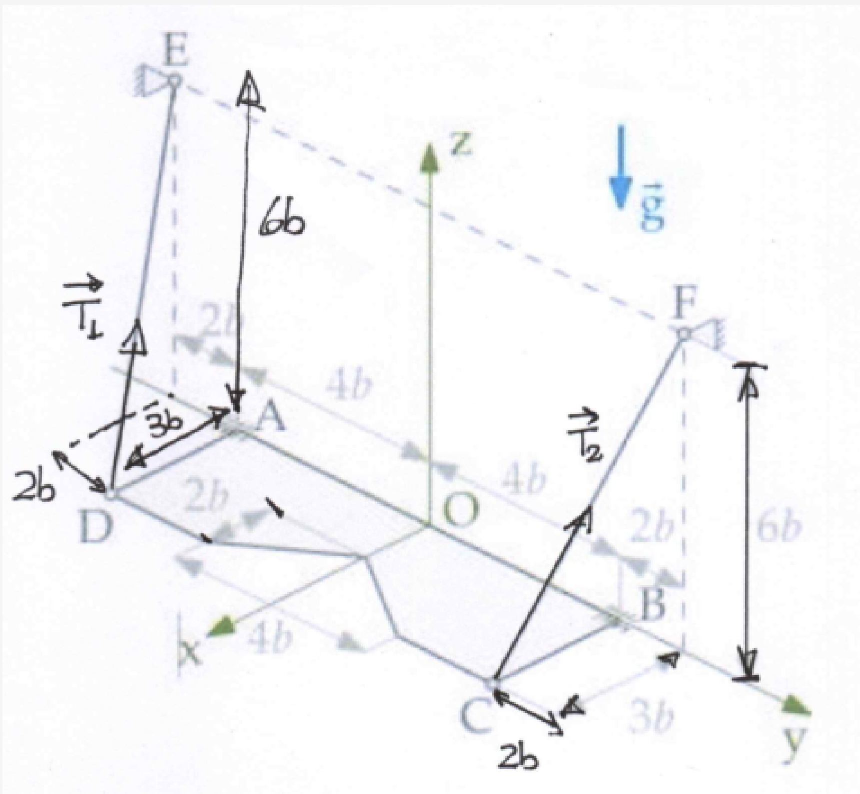
Assim temos para T_1 :

$$\vec{\boldsymbol{T_1}} = T_1 \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\vec{\boldsymbol{DE}}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{T_1}} = T_1 \cdot \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{DE}}}{|DE|}$$

E para T_2 :

$$\vec{\boldsymbol{T_2}} = T_2 \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\vec{\boldsymbol{CF}}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{T_2}} = T_2 \cdot \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{CF}}}{|CF|}$$

Com base nas coordenadas dos segmentos AB e CF, podemos determinar os seus respectivos vetores unitátios e encontrarmos definitavamente T_1 e T_2:



Cálculo de T_1

$$\vec{\boldsymbol{T_1}} = T_1 \cdot \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{DE}}}{|DE|} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{T_1}} = T_1 \cdot \left(\frac{-3b\vec{\boldsymbol{i}} - 2b\vec{\boldsymbol{j}} + 6b\vec{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{(3b)^2 + (2b)^2 + (6b)^2}} \right)$$

$$\vec{\boldsymbol{T_1}} = T_1 \cdot \left(-\frac{3\vec{\boldsymbol{i}}}{7} - \frac{2\vec{\boldsymbol{j}}}{7} + \frac{6\vec{\boldsymbol{k}}}{7} \right)$$

Cálculo de T_2

$$\vec{\boldsymbol{T_2}} = T_2 \cdot \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{CF}}}{|CF|} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{T_2}} = T_2 \cdot \left(\frac{-3b\vec{\boldsymbol{i}} + 2b\vec{\boldsymbol{j}} + 6b\vec{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{(3b)^2 + (2b)^2 + (6b)^2}} \right)$$

$$\vec{\boldsymbol{T_2}} = T_2 \cdot \left(-\frac{3\vec{\boldsymbol{i}}}{7} + \frac{2\vec{\boldsymbol{j}}}{7} + \frac{6\vec{\boldsymbol{k}}}{7} \right)$$

Do equilíbrio estático de forças temos:

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow X_A + X_B - \frac{3}{7} \cdot T_1 - \frac{3}{7} \cdot T_2 = 0$$

$$\rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -\frac{2}{7} \cdot T_1 + \frac{2}{7} \cdot T_2 = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$$

$$\uparrow \sum F_z = 0 \Rightarrow Z_A + Z_B + \frac{6}{7} \cdot T_1 + \frac{6}{7} \cdot T_2 - P = 0$$

Do equilíbrio de momentos temos:

$$\backsim \sum M_{Ox} = 0 \Rightarrow Z_B \cdot 4b - Z_A \cdot 4b + \frac{6}{7}(T_2 - T_1) \cdot 4b = 0$$

$$\backsim \sum M_{Oy} = 0 \Rightarrow (-3b) \cdot \frac{6}{7}(T_2 + T_1) + \frac{4}{3} \cdot b \cdot P = 0$$

$$\backsim \sum M_{Oz} = 0 \Rightarrow (4b) \cdot (X_A - X_B) + \left(4b \cdot \frac{3}{7} + 3b \cdot \frac{2}{7}\right) \cdot (T_2 - T1) = 0$$

Como $T_1 = T_2$, as equaçãoes ficam:

$$X_A + X_B - \frac{6}{7} \cdot T_1 = 0 \tag{1}$$

$$Z_A + Z_B + \frac{12}{7} \cdot T_1 - P = 0 \tag{2}$$

$$4b \cdot Z_B - 4b \cdot Z_A = 0 \Rightarrow Z_B = Z_A \tag{3}$$

$$-3b\frac{12}{7} \cdot T_1 + \frac{4}{3} \cdot bP = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{7}{27} \cdot P \tag{4}$$

$$4b\,(X_A - X_B) = 0 \Rightarrow X_A = X_B \tag{5}$$

De (1), (4) e (5) temos:

$$2X_A = \frac{6}{7} \cdot T_1 \quad \Rightarrow 2X_A = \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{27} \cdot P \quad \Rightarrow X_A = \frac{1}{9} \cdot P$$

De (2) e (3) temos:

$$2Z_A + \frac{12}{7} \cdot \frac{7}{27} \cdot P - P = 0 \quad \Rightarrow 2Z_A = P - \frac{12}{27} \cdot P \quad \Rightarrow Z_A = \frac{5}{18} \cdot P$$

Portanto:

$$\vec{\boldsymbol{T}}_{\mathbf{1}} = \vec{\boldsymbol{T}}_{\mathbf{2}} = \frac{7}{27}\vec{\boldsymbol{P}}$$
$$\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{9}\vec{\boldsymbol{P}}$$
$$\vec{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{B}} = \frac{5}{18}\vec{\boldsymbol{P}}$$

Passeideboa!

AULAS, CURSOS E MENTORIAS

WWW.PASSEIDEBOA.COM.BR

CURSO PREPARATÓRIO PARA O EXAME DE ADMISSÃO AO MESTRADO - POLI/USP (PPGEM/USP)

Matéria: MECÂNICA GERAL

Prof . M.Sc Victor T.Tayra

*

Questão 2

8) Considere o sistema ilustrado na figura, em que os corpos **1** (disco de centro de massa C) e **2** (barra de centro de massa G) são vinculados entre si por meio de uma articulação ideal localizada na periferia de ambos, em B. Há ainda, em A, uma articulação que vincula a barra **2** a uma base fixa com respeito a um referencial inercial. Denote por $\vec{\alpha}_1 = \alpha_1\vec{k}$ e $\vec{\alpha}_2 = \alpha_2\vec{k}$ as respectivas acelerações angulares dos corpos **1** e **2**. Admita que os corpos são homogêneos e têm a mesma massa m. Para a configuração indicada na figura, em que as linhas AB e BC estão na horizontal e vertical, respectivamente, e admitindo que os corpos encontram-se inicialmente em *repouso*, pede-se, para o instante imediatamente após a liberação do sistema:

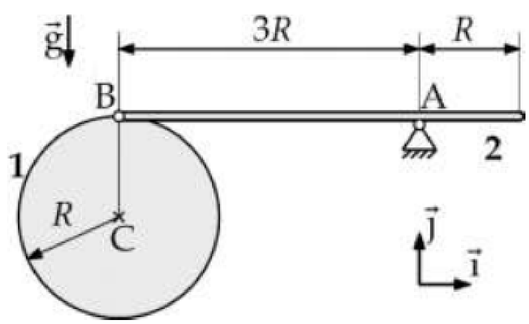
(a) Os diagramas de corpo livre dos corpos **1** (disco) e **2** (barra).

(b) As expressões das acelerações dos pontos G ($\vec{a}_G$), B ($\vec{a}_B$) e C ($\vec{a}_C$) em função de α_1 e α_2.

(c) Os valores de α_1 e α_2.

(d) A força aplicada pela barra **2** sobre o disco **1** por meio da articulação em B.

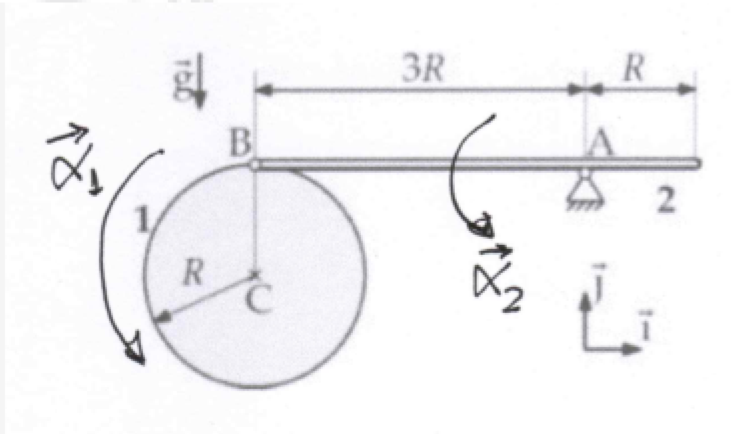
Dados: Para o disco de centro C, $J_{Cz} = mR^2/2$; para a barra de centro de massa G e comprimento L, $J_{Gz} = mL^2/12$.



Resolução 2

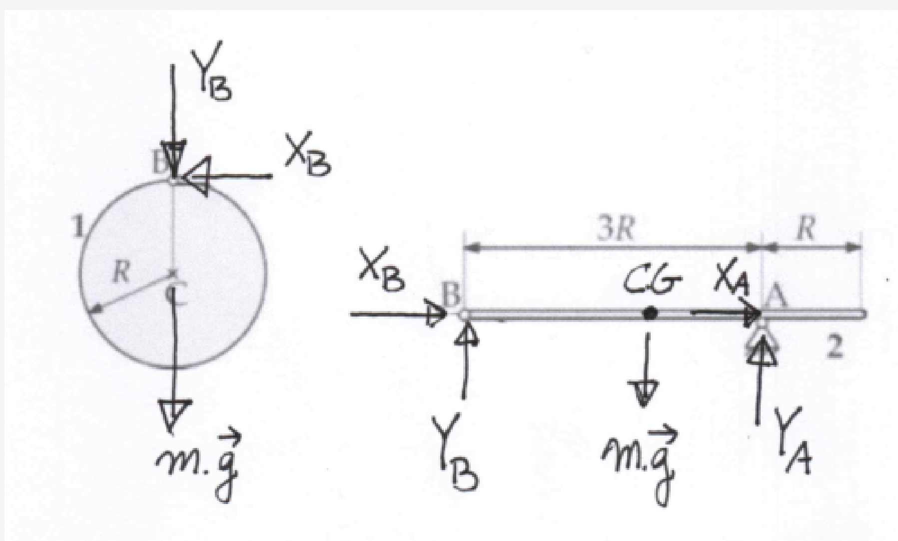
A -)

Observe que a barra é rígida e sua rotação com aceleração $\alpha_2\,\vec{\mathbf{k}}$, causará o surgimento de forças aplicadas na articulação em B, que consequentemente provocará a rotação do disco com aceleração $\alpha_1\,\vec{\mathbf{k}}$.



Assim a barra aplicará as forças Y_B e X_B no disco e pela Terceira Lei de Newton o disco aplicará as Forças Y_B e X_B, em sentidos opostos, na barra. Para a barra, haverá também as forças de reação Y_A e X_A do pino da articulação em A.

Para ambos os objetos haverá também a força peso gravitacional, atuando nos seus respectivos centros de massa. Sendo assim o diagrama de corpo livre para os objetos, com a representação de todas as forças atuantes, segue como representado abaixo:



B -)

Observe que temos um caso de movimentação circular de corpos rígidos, porém com diferentes pontos em diferentes posições e portanto com movimentos relativos entre eles. Neste caso utilizaremos a seguinte equação, que relaciona a aceleração absoluta em função da aceleração de um ponto base e em função do vetor posição entre estes dois pontos:

$$\boldsymbol{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \alpha \times \vec{R}_{B/A} - \omega^2 \cdot \vec{R}_{B/A}}$$

Onde:

- $\boldsymbol{\vec{a}_B}$ é a aceleração absoluta do ponto B.
- $\boldsymbol{\vec{a}_A}$ é a aceleração do ponto base A.
- $\boldsymbol{\alpha}$ a aceleração angular do corpo rígido.
- $\boldsymbol{\omega}$ a velocidade angular do corpo rígido.
- $\boldsymbol{\vec{R}_{B/A}}$ o vetor posição direcionado de A para B.

Aplicaremos a equação, enunciada genericamente acima, só que agora parametrizando para o ponto G da barra. Observe que podemos expressar a aceleração absoluta do ponto G com referência no ponto base A:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \alpha_2 \,\vec{\mathbf{k}} \times \vec{R}_{GA} - \omega^2 \cdot \vec{R}_{GA}$$

Como o sistema parte do repouso, temos que as velocidades angulares da barra e do disco serão nulas assim teremos $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Observe ainda que o ponto A está estático na articulação e portanto $\vec{a}_A = 0$.

Sendo assim:

$$\vec{a}_G = 0 + \alpha_2 \,\vec{\mathbf{k}} \times (-R \cdot \vec{\mathbf{i}}) - 0^2 \cdot \vec{R}_{GA}$$

$$\vec{a}_G = -\alpha_2 \, R \,\vec{\mathbf{j}}$$

De maneira análoga a aceleração do ponto B, com referência no ponto base A é dada por:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \alpha_2\,\vec{\mathbf{k}} \times \vec{R}_{BA} - \omega^2 \cdot \vec{R}_{BA}$$

$$\vec{a}_B = 0 + \alpha_2\,\vec{\mathbf{k}} \times (-3R\,\vec{\mathbf{i}}) - 0^2 \cdot \vec{R}_{BA}$$

$$\vec{a}_B = -3R\,\alpha_2\,\vec{\mathbf{j}}$$

Para o disco vamos expressar sua aceleração do ponto C, com referência no ponto base B:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \alpha_1\,\vec{\mathbf{k}} \times \vec{R}_{CB} - \omega^2 \cdot \vec{R}_{CB}$$

$$\vec{a}_C = -3R\,\alpha_2\,\vec{\mathbf{j}} + \alpha_1\,\vec{\mathbf{k}} \times (-R\,\vec{\mathbf{j}}) - 0^2 \cdot \vec{R}_{CB}$$

$$\vec{a}_C = -3R\,\alpha_2\,\vec{\mathbf{j}} + \alpha_1\,R\,\vec{\mathbf{i}}$$

Portanto as acelerações dos pntos G, B e C serão respectivamente:

- $\boldsymbol{\vec{a}_G}$ é a aceleração absoluta do ponto B.
- $\boldsymbol{\vec{a}_B}$ é a aceleração do ponto base A.
- $\boldsymbol{\vec{a}_B}$ é a aceleração do ponto base A.

C -)

Para determinarmos esses valores, é necessário antes obtermos equações com essas variáveis e assim através da resolução de sistemas lineares, isolarmos essas expressões. Vamos expressar as equações de forças e momentos para o disco e para a barra.

Para o Disco ①:

$$\rightarrow \sum F_{1x} = m \cdot a_{Cx} \Rightarrow -X_B = R \cdot \alpha_1$$

$$\uparrow \sum F_{1y} = m \cdot a_{Cy} \Rightarrow -Y_B - mg = m(-3R \cdot \alpha_2)$$

$$\backsim \sum M_{1C} = J_1 \cdot \alpha_1 \Rightarrow R \cdot X_B = (\frac{m \cdot R^2}{2})\alpha_1$$

Assim temos as expressões:

$$X_B = -R\,\alpha_1 \tag{1}$$

$$Y_B = 3R\,m\,\alpha_2 - mg \tag{2}$$

$$X_B = \frac{m\,R\,\alpha_1}{2} \tag{3}$$

Para a Barra ②:

$$\rightarrow \sum F_{2x} = m \cdot a_{Gx} \Rightarrow X_A + X_B = 0$$

$$\uparrow \sum F_{2y} = m \cdot a_{Gy} \Rightarrow Y_A + Y_B - m\,g = m\,(-R\,\alpha_2)$$

$$\backsim \sum M_{2G} = J_G \cdot \alpha_2 \Rightarrow Y_A\,R - Y_B\,2R = \frac{m(4R)^2}{12}\,\alpha_2$$

Assim temos as expressões:

$$X_A = -X_B \tag{4}$$

$$Y_A + Y_B = m\,g - m\,R\,\alpha_2 \tag{5}$$

$$Y_A - 2\,Y_B = \frac{16\,mR}{12}\,\alpha_2 \tag{6}$$

Das expressões (5) e (6) temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} Y_A + Y_B = m\,g - m\,R\,\alpha_2 \\ Y_A - 2\,Y_B = \dfrac{16\,mR}{12}\,\alpha_2 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira linha por dois (x 2) e somando as expressões temos:

$$\begin{cases} 2Y_A + 2Y_B = 2m\,g - 2m\,R\,\alpha_2 \\ \\ Y_A - 2\,Y_B = \dfrac{16\,mR}{12}\,\alpha_2 \\ \end{cases}$$

$$3\,Y_A = 2m\,g - 2m\,R\,\alpha_2 + \frac{4\,m\,R\,\alpha_2}{3}$$

Assim temos que Y_A é:

$$Y_A = \frac{6\,mg - 2\,m\,R\,\alpha_2}{9}$$

Agora podemos substituir Y_A e Y_B na expressão (5) e teremos:

$$\frac{6\,mg - 2\,m\,R\,\alpha_2}{9} + 3Rm\alpha_2 - mg = mg - mR\alpha_2$$

$$34\,R\,m\,\alpha_2 = 12\,m\,g$$

$$\alpha_2 = \frac{12\,g}{34\,R} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{6\,g}{17\,R}$$

Das expressões (1) e (3) temos:

$$-R\,\alpha_1 = \frac{m\,R^2\,\alpha_1}{2}$$

Condição esta satisfeita somante com $\alpha_1 = 0$
Portanto as acelerações angulares α_1 e α_2 são respectivamente:

$$\boldsymbol{\alpha_1 = 0}, \quad \boldsymbol{\alpha_2 = \frac{6\,g}{17\,R}}$$

Passeideboa !

AULAS, CURSOS E MENTORIAS

WWW.PASSEIDEBOA.COM.BR

CURSO PREPARATÓRIO PARA O EXAME DE ADMISSÃO AO MESTRADO - POLI/USP (PPGEM/USP)

Matéria: MECÂNICA GERAL

Prof . M.Sc Victor T.Tayra

*

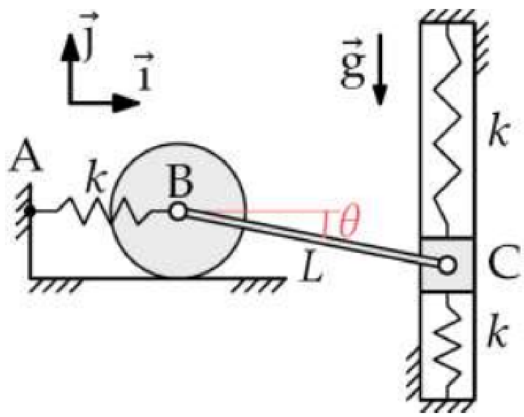
Questão 3

9) O sistema ilustrado na figura é constituído por um disco homogêneo de centro B, massa m e raio R e momento de inércia central $J_{Bz} = mR^2/2$, que pode *rolar sem escorregar* sobre uma superfície plana horizontal, vinculado a um bloco C de massa m, que pode deslizar *sem atrito* em uma guia vertical, por meio de uma barra BC de *massa desprezível* e comprimento L, articulada em suas extremidades B e C. O ângulo entre a barra BC e a horizontal medido no sentido horário é igual a θ. Sabe-se que na configuração $\theta = 0$ as três molas lineares de constante k indicadas estão relaxadas. Pede-se:

(a) Determinar o centro instantâneo de rotação da barra BC, a velocidade $\vec{v}_C$ do bloco C e o vetor rotação $\vec{\omega}$ do disco, em função de θ e $\dot{\theta}$.

(b) As expressões da energia cinética (T) e da energia potencial (V) do sistema em função de θ e $\dot{\theta}$.

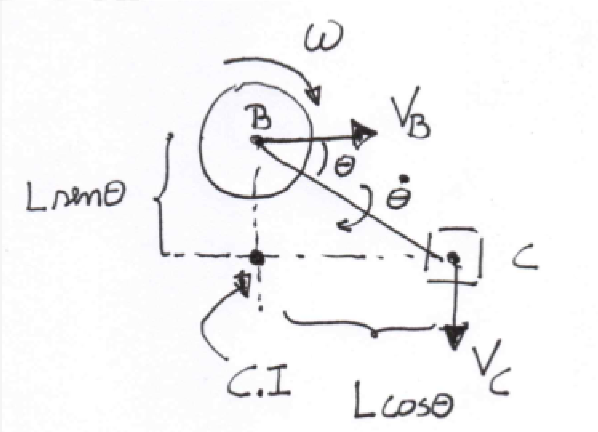
(c) A expressão de $\dot{\theta}$ em função de θ admitindo que o sistema parta do repouso da configuração $\theta = 0$.



Resolução 3

A -)

Centro Instantâneo de velocidade é o ponto do sistema em que a velocidade é nula. Para encontramos o C.I, basta prolongarmos linhas perpendiculares às velocidades:



Da figura, temos que θ é o ângulo de rotação da barra em relação ao centro do disco. Assim $\dot{\theta}$ será a velocidade angular de rotação da barra em relação ao centro B do disco. Como base na propriedade do centro instantâneo obtemos:

$$\vec{v_B} = \dot{\theta}\, L \sin\theta\, \vec{\mathbf{i}}$$
$$\vec{v_C} = -\dot{\theta}\, L \cos\theta\, \vec{\mathbf{j}}$$

Para o disco temos que $v_B = \omega \cdot R$. Assim temos que a velocidade angular ω do disco será:

$$\vec{\omega} = \frac{-L\,\dot{\theta}\,\sin\theta}{R}\,\vec{\mathbf{k}}$$

B -)

O sistema apresentará tanto as energias cinéticas do disco como a energia cinética do bloco. O bloco apresentará somente a energia cinética de translação que é em função da massa (m) e da velocidade escalar (v).

Já o disco apresentará tanto a energia cinética de translação como também a energia cinética de rotação, sendo que esta última é em função do momento de inércia (J) e da velocidade angular (ω).

Energia cinética do Disco 1:

$$T_1 = \frac{m\,v_B^2}{2} + \frac{J\,\omega^2}{2}$$

$$T_1 = \frac{m\,(\dot\theta\,L\sin\theta)^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{m\,R^2}{2}\right)\left(\frac{L\dot\theta\,\sin\theta}{R}\right)^2$$

$$T_1 = \frac{m\,L^2\,\dot\theta^2\,\sin^2\theta}{2} + \frac{m\,R^2\,L^2\,\dot\theta^2\,\sin^2\theta}{4\,R^2}$$

Energia cinética do bloco 2:

$$T_2 = \frac{m\,v_C^2}{2}$$

$$T_2 = \frac{m\,L^2\,\dot\theta^2\,\cos^2\theta}{2}$$

Assim a energia cinética total do sistema será:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T = \frac{m\,L^2\,\dot\theta^2\,\sin^2\theta}{2} + \frac{m\,R^2\,L^2\,\dot\theta^2\,\sin^2\theta}{4\,R^2} + \frac{m\,L^2\,\dot\theta^2\,\cos^2\theta}{2}$$

$$T = \frac{m\,L^2\,\dot\theta^2\cdot\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)}{2} + \frac{m\,L^2\,\dot\theta^2\,\sin^2\theta}{4}$$

$$T = \frac{m\,L^2\,\dot\theta^2}{2}\cdot\left(1 + \frac{\sin^2\theta}{2}\right)$$

As energias potenciaias do sistema se devem às energias potenciais elásticas, resultantes das deformaçãoes das molas pelo cursor C, como também devio a energia potencial gravitacional resultante da variação de altura do objeto C.

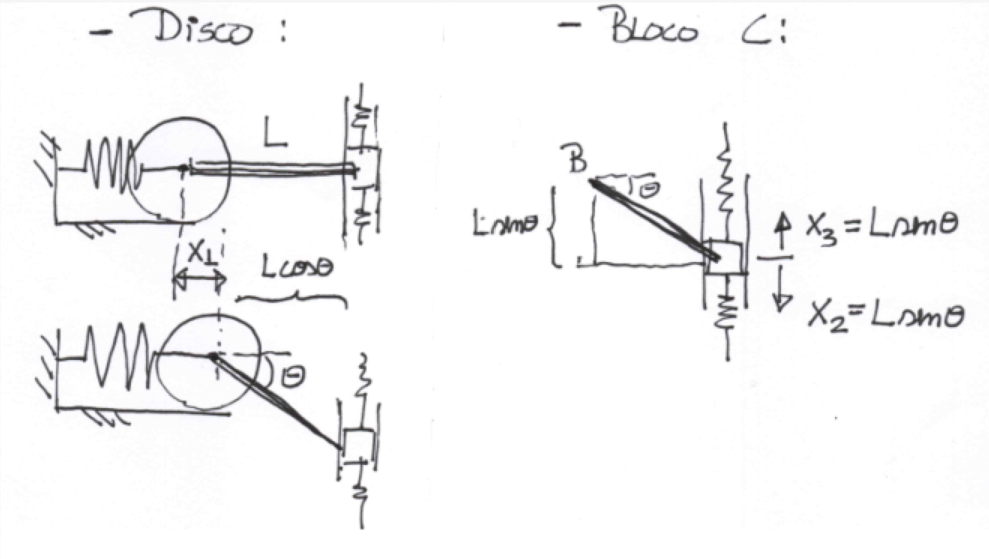
Energia Potencial:

Conforme esquematizado acima, houve uma variação de altura h_c, dada pela relação $h_c = L\,\sin\theta$. Considerando nossa referência de vetores diretores, sendo $\vec{j}$ com sentido vertical positivo ascendente, percebemos que o bloco C, desloca-se em sentido contrário ao vetor diretor $\vec{j}$ e portanto terá sinal negativo:

$$V_1 = m\,g\,h_c = -m\,g\,L\,\sin\theta$$

Energia Potencial Elástica:

A energia potencial elástica resultará da deformação x_1 da mola pelo disco, e das deformaçãos x_2 e x_3, resultantes da compressão e tração das molas no cursos pelo bloco C. Assim, podemos esquematizar as seguintes relaçãoe trigonométricas:



Sendo que para o disco o comprimento x_1 é dado pela diferença $x_1 = L - L \cdot \cos\theta$, ou seja, $x_1 = L \cdot (1 - \cos\theta)$.

Assim, as expressões para as energias potenciais elásticas totais, resulta em:

$$V_2 = \frac{K \cdot x_1^2}{2} + \frac{K \cdot x_2^2}{2} + \frac{K \cdot x_3^2}{2}$$

$$V_2 = \frac{K \cdot L^2 \left(1 - \cos\theta\right)^2}{2} + \frac{K \cdot L^2 \sin^2\theta}{2} + \frac{K \cdot L^2 \sin^2\theta}{2}$$

$$V_2 = \frac{K \cdot L^2 \left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta\right)}{2} + \frac{K \cdot L^2 \sin^2\theta}{2} + \frac{K \cdot L^2 \sin^2\theta}{2}$$

$$V_2 = \frac{K \cdot L^2 \left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta\right)}{2} + \frac{K \cdot L^2 \sin^2\theta}{2}$$

Da relação trigonométrica:

$$\boldsymbol{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2}$$

O que permite simplificar a expressão V_2 para:

$$V_2 = \frac{K \cdot L^2 \left(3 - 2\cos\theta - \cos^2\theta\right)}{2}$$

Assim a energia potencial total do sistema será dada por:

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = \frac{K \cdot L^2 \left(3 - 2\cos\theta - \cos^2\theta\right)}{2} - m\,g\,L\,\sin\theta$$

C -)

Sabemos que em um sistema conservativo, a soma das energias cinéticas e potenciais resultam nula. Assim:

$$T + V = 0$$

$$\frac{m\,L^2\,\dot{\theta}^2}{2}\cdot\left(1+\frac{\sin^2\theta}{2}\right)+\frac{K\cdot L^2\left(3-2\cos\theta-\cos^2\theta\right)}{2}-m\,g\,L\,\sin\theta=0$$

$$\frac{m\,L^2\,\dot{\theta}^2}{2}\cdot\left(1+\frac{\sin^2\theta}{2}\right)=m\,g\,L\,\sin\theta-\frac{K\cdot L^2\left(3-2\cos\theta-\cos^2\theta\right)}{2}$$

$$\dot{\theta}^2=\frac{m\,g\,L\,\sin\theta-\frac{K\cdot L^2\left(3-2\cos\theta-\cos^2\theta\right)}{2}}{\frac{m\,L^2}{2}\left(1+\frac{\sin^2\theta}{2}\right)}$$

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{m\,g\,L\,\sin\theta-\frac{K L^2(3-2\cos\theta-\cos^2\theta)}{2}}{\frac{m\,L^2}{2}\left(1+\frac{\sin^2\theta}{2}\right)}}$$